Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24. март 2024.

Први разред - А категорија

1. Нека је ABC дати троугао и нека је $\sphericalangle CAB = 60^\circ$. Означимо са O и I средишта описане и уписане кружнице тог троугла, редом. Нека је A' тачка симетрична тачки A у односу на праву BC. Доказати да права OI полови угао AOA'.

2. Дат је квадратна табла димензије $n \times n$, $n \geqslant 2$. У свако од n^2 јединичних поља дате табле уписан је по један природан број из скупа $1, 2, \ldots, n^2$. Посматрајмо све 2×2 квадратиће који су у потпуности садржани унутар табле (сваки од њих садржи тачно четири јединична поља). За сваки поменути квадратић нађимо највећи од бројева записаних у пољима тог квадратића, а затим запишимо све добијене бројеве на папиру. У зависности од n, одредити колики је најмањи број различитих бројева који су записани на папиру.

3. Претпоставимо да за међусобно различите природне бројеве $a_1, a_2, \ldots, a_{2024}$ важи једнакост $[a_1, a_2]+(a_2, a_3)+[a_3, a_4]+(a_4, a_5)+...+[a_{2023}, a_{2024}]+(a_{2024}, a_1) = a_1+a_2+\ldots+a_{2024}$. Доказати неједнакост

$$(a_1, a_2) + [a_2, a_3] + (a_3, a_4) + [a_4, a_5] + \ldots + (a_{2023}, a_{2024}) + [a_{2024}, a_1] \geqslant a_1 + a_2 + ... + a_{2024}.$$

Да ли је могуће да у наведеној неједнакости важи знак једнакости (за целе бројеве a и b, природни бројеви (a, b) и $[a, b]$ означавају, редом, највећи заједнички делилац и најмањи заједнички садржалац тих бројева)?

4. Одредити најмањи природан број n такав да за неке реалне бројеве $a_0, a_1, \ldots, a_n$ функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, која је дефинисана са

$$f(x) = ||\ldots|||x - a_0| - a_1| - a_2| - \ldots| - a_{n-1}| - a_n,\ x \in \mathbb{R},$$

има тачно 2023 реалне нуле.
Напомена: Тачка $x_0 \in \mathbb{R}$ је нула функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ако је $f(x_0) = 0$.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24. март 2024.

Други разред - А категорија

1. Познато је да за сваки реалан број x важи неједнакост
$$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 + ... + (x+27)^2 + (x+28)^2 \geqslant 2024. \qquad (*)$$
Колико се највише сабирака, са леве стране неједнакости $(*)$, може обрисати (избацити) тако да новодобијена неједнакост буде тачна за свако реално x?

2. За округлим столом распоређене су столице и нумерисане, редом, у смеру казаљке на сату, бројевима $1, 2, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. На свакој од тих столица седи по један човек, окренут лицем ка средини стола, који или увек говори истину или увек лаже. Сваки човек је изјавио да ли његов леви сусед лаже или говори истину. Формирајмо реч дужине n, тј. од n слова, такву да се, за све $1 \leqslant i \leqslant n$, на позицији i у речи налази слово Л, уколико је човек на столици i рекао за свог левог суседа да лаже, а слово И, уколико је човек на столици i рекао за свог левог суседа да говори истину (леви сусед човека на $n-$тој столици је онај који седи на првој). Реч дужине n састављену од слова Л и И називамо пролазном уколико се она може добити претходно описаним поступком. Колико различитих пролазних речи постоји?

3. За сваки природан број n, $n > 1$, ћемо са $f(n)$ означити најмањи број умножака које треба избацити из производа $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, тако да новодобијени производ није дељив са n. Одредити све природне бројеве $n > 1$ за које важи $f(n) = 2023$.

4. На страници BC оштроуглог троугла ABC уочена је тачка X. Означимо са O средиште описане кружнице троугла ABC, а са S, $S \neq O$, тачку у унутрашњости троугла ABC за коју важи $\sphericalangle BAX = \sphericalangle ABS$ и $\sphericalangle CAX = \sphericalangle ACS$. Доказати да је $\sphericalangle SAO = \sphericalangle AXO$.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24. март 2024.

Трећи разред - А категорија

1. Дато је n дискова у равни. Доказати да је могуће изабрати неколико дисјунктних дискова тако да је збир њихових површина барем једна деветина од укупне површине коју су ти дискови покривали на почетку.

2. Дат је природан број k и строго растући низ (a_n), $n \in \mathbb{N}$, природних бројева ($a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$). Претпоставимо да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи $a_{n+1} - a_n \leqslant k$, као и да бројеви a_n и n, за свако $n \in \mathbb{N}$, имају исти број природних делилаца. Доказати да је $a_n = n$, за свако $n \in \mathbb{N}$.

3. Нека је $ABCD$ тетиван четвороугао чије се дијагонале AC и BD секу у тачки P. Нека је Q, $Q \neq P$, друга тачка пресека описаних кружица око троуглова APD и BPC. Означимо са X и Y, редом, пресеке праве PQ са страницама AB и CD датог четвороугла. Ако је $AX \cdot YC = XB \cdot DY$, доказати да је $AX + YC = XB + DY$.

4. Низови реалних бројева (a_n) и (b_n), $n \in \mathbb{N}$, су задати на следећи начин:

$$a_1 = 1,\, b_1 = 2,\, a_{n+1} = b_n + \frac{1}{a_n} \text{ и } b_{n+1} = a_n + \frac{1}{b_n},\ n \in \mathbb{N}.$$

Доказати да је $b_{2023} > 2\sqrt{2023}$.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24. март 2024.

Четврти разред - А категорија

1. Нека су $1 = d_1 < d_2 < ... < d_{16} = n$ сви позитивни делиоци природног броја n, а $1 = D_1 < D_2 < ... < D_{15} = n + 1$ сви позитивни делиоци броја $n + 1$. Одредити све природне бројеве n за које важи

$$(D_2 - d_2) \cdot (D_3 - d_3) \cdot (D_4 - d_4) = D_8 - d_8.$$

2. У троуглу ABC тачка I је средиште уписане кружнице, тачка D је тачка додира уписане кружнице и странице BC, а E и F су тачке пресека уписане кружнице и кружнице описане око троугла BCI. Ако су X и Y тачке пресека праве EF и кружнице описане око троугла ABC, доказати да је $\sphericalangle XDE = \sphericalangle YDF$.

3. Нека су $x_1, x_2, \ldots, x_{2023}$ све нуле полинома $P(x) = x^{2023} + ax + b$, где су a и b произвољни реални бројеви за које важи $a + 1 \neq b$. Одредити све вредности параметра a за које вредност израза

$$\frac{1}{x_1^3 + 1} + \frac{1}{x_2^3 + 1} + ... + \frac{1}{x_{2023}^3 + 1}$$

не зависи од b.

4. Отворено првенство ДМС-а је престижан тениски турнир на коме се састаје 2^n најбоље рангираних тенисера, где је n природан број. Тенисери су произвољно подељени у парове првог кола који играју меч и притом само победници ових мечева настављају турнир. Даље се овај процес (подела на парове и одигравање мечева) понавља све до n-тог кола, односно финала, у чијем се јединoм мечу састају два тенисера која су победила у свим претходним мечевима. Означимо са M минималну вредност (међу свим могућим исходима турнира) највеће разлике у рангу два тенисера која су на турниру одиграла меч. Доказати да важи

$$\frac{2^n - 1}{2n - 1} \leqslant M \leqslant \binom{n-1}{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor},$$

где је са $\lfloor x \rfloor$, $x \in \mathbb{R}$, означен највећи цео број не већи од x.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.
Решења задатака детаљно образложити.